

Poznań, 12.11.2019

dr hab. Dorota Leszczyńska-Jasion, prof. UAM
Zakład Logiki i Kognitywistyki,
Wydział Psychologii i Kognitywistyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Mateusza Klonowskiego pt. „Aksjomatyzacja monorelacyjnych logik wiążących”, napisanej pod kierunkiem prof. UMK dra hab. Tomasza Jarmużka

1 Przedmiot rozprawy doktorskiej

Przedmiotem przedstawionej do oceny rozprawy doktorskiej są zdaniowe logiki wiążące, tj. pewne logiki filozoficzne, nad którymi badania rozpoczął Richard Epstein, a które pozwalają wyrazić i analizować fakt związku treściowego pomiędzy zdaniami. Podstawowym celem tego typu logik filozoficznych jest przekroczenie ograniczeń logiki klasycznej w modelowaniu języka naturalnego. Typowym zadaniem jest pozbycie się tzw. paradoksów implikacji materialnej. Przedstawiona rozprawa dotyczy więc formalizmów bardzo ważnych w rozwoju logik filozoficznych, choć obecnie być może niedocenianych, a jednocześnie techniczne cele, jakie realizuje rozprawa doktorska, są bardzo ważne w zakresie metalogiki i teorii dowodu logik wiążących. Celem jest aksjomatyzacja logik z bardzo obszernej klasy logik wiążących oraz wykazanie najważniejszych własności zaproponowanej aksjomatyki.

Streszczenie

Rozprawa liczy 236 stron, składa się ze spisu treści, wstępu, sześciu rozdziałów, zakończenia, dodatku i spisu cytowanej w pracy literatury.

W rozdziale pierwszym Autor wprowadza czytelnika w zagadnienia semiotyczne zaczynając od pojęcia znaku. Podrozdział 2. stanowi opis Klasycznej Logiki Zdań wraz z wprowadzeniem podstawowych konwencji notacyjnych. Z kolei rozdział drugi przypomina tzw. paradoksy implikacji materialnej oraz ważne w historii przedmiotu logiki nieklasyczne, których autorzy podejmowali temat paradoksów implikacji materialnej. Omówione zostają więc implikacja ścisła zaproponowana przez C.I. Lewisa, implikacja z klauzulą *ceteris paribus* i logika relewantna. Logiki nieklasyczne zostały dobrane stosownie do celu pracy, wskazane są paradoksy, których te logiki nieklasyczne pozwalają uniknąć.

Rozdział trzeci jest właściwym wprowadzeniem do problematyki logik wiążących. Autor przedstawia historyczny kontekst powstania logik wiążących opisanych przez Richarda L. Epsteina, wskazuje motywacje filozoficzne. Przedstawiona jest tu szczegółowo semantyczna analiza relacji powiązania i relacji zależności, a następnie różne ujęcia semantyczne logik wiążących, wskazane są również związki między różnymi semantykami.

W rozdziale czwartym przedstawione zostają główne bohaterki pracy, czyli logiki wiążące określone semantycznie przez modele oparte na jednej, zdefiniowanej na zbiorze formuł języka, relacji binarnej, i z tego powodu nazwane *monorelacyjnymi* logikami wiążącymi. Decydujące w wyznaczaniu logik wiążących są własności tych relacji binarnych. Autor wprowadza klasyfikację relacji ze względu na typy ich własności: horyzontalne relacje wiążące zdefiniowane zostały przez standardowe warunki rozważane w rachunku relacji binarnych, takie jak zwrotność, symetryczność, przechodniość. Wertykalne relacje wiążące określone są przez warunki odnoszące się do struktury formuł rozważanego języka. W końcu diagonalne relacje wiążące mogą być definiowane przez kombinacje horyzontalnych i wertykalnych warunków.

Wprowadzona w rozdziale czwartym semantyka pozwala na zdefiniowanie semantycznych relacji konsekwencji. Autor bada także ich ważne własności metalogiczne jak finitystyczność i strukturalność.

Omówiony zostaje również istotny dla tak zdefiniowanych logik problem wyrażalności relacji wiążącej (o określonych własnościach) w języku przedmiotowym logiki wiążącej.

W rozdziale piątym Autor przedstawia system aksjomatyczny dla najsłabszej logiki wiążącej W i wprowadza aparaturę niezbędną, by przeprowadzić dowód pełności tego systemu i jego rozszerzeń względem relacyjnych semantyk metodą Henkina, tzn. z wykorzystaniem lematu Lindenbauma dotyczącego zbiorów maksymalnie niesprzecznych.

W rozdziale szóstym zaprezentowane są finalne wyniki, tj. adekwatność (zgodność i pełność) omawianych systemów aksjomatycznych dla logiki W , i wielu jej rozszerzeń, względem przedstawionej semantyki relacyjnej. Zaprezentowano tu również alternatywną aksjomatyzację dla logiki W . Praca kończy się efektownie, gdy przedstawione w pracy wyniki Autor uogólnia podając konieczny i wystarczający warunek aksjomatyzowalności logiki wiążącej. Jest nim wyrażalność własności relacji semantycznej w przedmiotowym języku logiki wiążącej.

Dodatek zawiera dowody aksjomatyczne przeprowadzone we wprowadzonych w rozprawie systemach.

2 Ocena rozprawy doktorskiej

Jest to dobrze napisana praca dotycząca jednego z najważniejszych zagadnień logiki filozoficznej, tj. adekwatnej analizy rozumowań przeprowadzanych w języku naturalnym przy pomocy narzędzi logicznych. Należy podkreślić, że pod względem filozoficznym logiki wiążące realizują swój cel: umożliwiają one pozbycie się przynajmniej niektórych paradoksów Klasycznej Logiki Zdań. Pod względem technicznym, zaprezentowane wyniki metalogiczne są bardzo ważne, ponieważ aksjomatyczne opisy omawianych logik nie były wcześniej znane.

Struktura pracy jest poprawna i przejrzysta. Autor zadbał o to, aby wyniki techniczne były odpowiednio skomentowane na intuicyjnym poziomie. Dzięki temu pracę dobrze się czyta i może ona stanowić znakomite wprowadzenie do problematyki logik wiążących dla mniej i bardziej doświadczonych badaczy.

Przedstawiona praca dowodzi, że Autor potrafi podjąć ważny, interesujący problem badawczy i znaleźć dla niego rozwiązanie. Ponadto, przedstawione rozumowania świadczą o tym, że Autor dobrze opanował warsztat logiczny.

Zasadnicze uwagi krytyczne do rozprawy formułuję poniżej, można powiedzieć, że wszystkie dotyczą w ten lub inny sposób pojęcia dowodu, które w rozprawie podejmującej problem aksjomatyzacji powinno być potraktowane z należyтым pietyzmem. Chcę podkreślić, że uwagi krytyczne nie dezawuuja pracy, a raczej wskazują w jakim kierunku można, a niekiedy należy, ją uzupełnić.

Zamieszczona przeze mnie poniżej lista uwag szczegółowych i redakcyjnych jest długa, należy jednak podkreślić, że przy pracy o tej objętości drobne błędy i literówki są nieuniknione. Spis ma na celu pomóc Autorowi poprawić pracę przed publikacją. Opublikowanie pracy w formie monografii uważam za wskazane.

Uwagi krytyczne do pracy

Moje uwagi dotyczą przede wszystkim analizy teorii dowodowej. Omówię je w kolejności, w jakiej się pojawiały. Przypadkowo, kolejność ta układa omówione problemy w porządku rosnącej istotności.

Opis systemu aksjomatycznego, rozpoczynający się na stronie 21 (podrozdział 2.2) nie precyzuje, czy system będzie się opierał na aksjomatach, czy na ich schematach. Znajdujemy tu (sekcja 2.2.) opis aksjomatyzacji KLZ, w którym Autor zamiennie używa określeń „aksjomaty” i „schematy aksjomatów”, co jest niewłaściwe, ponieważ schematy nie są formułami języka KLZ, ale wyrażeniami metajęzyka. Każda formuła podpadająca pod schemat aksjomatu jest aksjomatem, co znaczy, że charakteryzując system aksjomatyczny przy pomocy skończenia wielu schematów aksjomatów wyznaczamy nieskończenie wiele aksjomatów, rezygnując przy tym na ogół z reguły podstawiania. Nie sugeruję bynajmniej, że Autor pracy o tym nie wie, a tylko tyle, że nie dość uważnie używa języka – dla przykładu, fragment na s.21: „system aksjomatyczny będzie utożsamiony z najmniejszym zbiorem formuł, zawierającym schematy aksjomatów (...)” sugeruje, że schematy należą do języka.

Schematy na zmianę z formułami języka przedmiotowego pojawiają się również w kontekście „wynikań”, przy czym autor nie precyzuje co dokładnie znaczy, że wynikanie *nie zachodzi* dla schematu. Przykład ze strony 69: „Pokażemy, że $\not\models_{\mathbf{MR}_{rp}} [A \rightarrow^w (B \rightarrow^w B)] \rightarrow^w [B \rightarrow^w (A \rightarrow^w A)]$.” Biorąc pod uwagę następujący dalej dowód należy to rozumieć tak: nie jest tak, że dla każdego konsekwentnego zastąpienia metazmiennych A, B, C formułami języka For_{LE} uzyskana formuła jest tautologią LE na gruncie klasy $\mathbf{MR}_{rp}$.

Kolejna, bardziej istotna, uwaga dotycząca przedstawienia systemu aksjomatycznego w całej pracy jest następująca: Autor nie posługuje się pojęciem dowodu, a pojęcie tezy i konsekwencji zdefiniowane zostały bez użycia pojęcia dowodu. Uważam, że jest to mankament pracy, przede wszystkim dlatego, że pomija się w ten sposób okazję dla określenia w podanych systemach pojęcia centralnego dla teorii dowodu. Jeśli jest to zabieg celowy, należało go jakoś skomentować. Wątpię jednak w jego celowość, skoro ostatecznie w dodatku Autor nazywa przedstawione ciągi dowodami, pomimo że nie zdefiniował tego pojęcia.

Kolejny problem związany z przedstawieniem systemów aksjomatycznych dla logik wiążących polega na tym, że w definicji systemu aksjomatycznego Σ jako warunek konieczny określający to pojęcie podaje się $KT \subseteq \Sigma$ (definicja V.2.1, s. 171). Zbiór KT został jednak określony semantycznie (zob. s. 104) i, o ile mi wiadomo, nie ma dla niego aksjomatyki. Może się wydawać, że z podobnym zabiegiem spotykamy się np. przy aksjomatycznym określaniu logik modalnych, zob. [2], gdzie kolejne logiki modalne definiowane są „nad” bazą „PC-aksjomatów”. W tym jednak przypadku wolno nam tak postąpić, bo klasyczna logika zdań ma dobrze określone, adekwatne systemy aksjomatyczne. Czy tak ma się sytuacja w przypadku logiki KT – nie wiadomo. Oznacza to, niestety, że **pomimo przedstawionych w rozprawie wyników efektywna aksjomatyzowalność logik zbudowanych nad KT pozostaje sprawą otwartą**. Na domiar złego, przy pomocy warunku należenia lub nienależenia do zbioru KT określane są też dodatkowe reguły (patrz: s. 172).

Dla analizy teoriiodowodowej kluczowe są pojęcia: dowodu (tego brak), tezy i wyprowadzalności. Dwa ostatnie pojawiają się na s. 173. Wyprowadzalność zdefiniowana została przy użyciu klasycznej implikacji materialnej: „ A jest wyprowadzalna z Γ na gruncie Σ (...) wtw istnieje $\{B_1, \dots, B_n\} \subseteq \Gamma$, dla jakiegoś $n \in \mathbb{N}$, taki, że $(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \rightarrow A \in \Sigma$ ” (definicja V.2.4, s. 173). Bardziej właściwe byłoby użycie implikacji metajęzykowej: „ A jest wyprowadzalna z Γ na gruncie Σ wtw dla pewnego $\{B_1, \dots, B_n\} \subseteq \Gamma$, jeśli $\{B_1 \dots B_n\} \subseteq \Sigma$, to $A \in \Sigma$ ”. Taka definicja ma przede wszystkim tę zaletę, że nie zależy od spójników, jakie mamy w języku. Zaproponowane przez autora pojęcie jest nieadekwatne dla języka, w którym nie ma klasycznej implikacji i / lub koniunkcji.

Na marginesie (albo i w centrum) jest również pytanie o twierdzenie o dedukcji, którego nie da się sensownie wyrazić dla pojęcia wyprowadzalności wprowadzonego przy pomocy implikacji języka przedmiotowego. Moim zdaniem nasuwa to pytanie o adekwatność definicji pojęcia wyprowadzalności. Wszystkie te problemy wynikają, moim zdaniem, wprost z braku pojęcia dowodu.

Żałuję również, że autor nie pokusił się o porównanie stwierdzonych przez siebie własności analizowanej relacji wyprowadzalności z tymi znanymi z literatury. Dla przykładu, wydaje się, że punkt (2) wniosku V.2.6 na s. 174 wyraża monotoniczność, a punkt (1) tegoż wniosku jest jakąś wariacją na temat zwrotności relacji wyprowadzalności.

3 Wnioski

Pomimo wskazanych wyżej niedociągnięć pracę oceniam bardzo wysoko. Nie mam wątpliwości, że przedstawiona praca spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. **Wnoszę zatem o jej przyjęcie oraz o dopuszczenie Pana mgra Mateusza Klonowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Dorota Leszczyńska-Jasion

Uwagi szczegółowe i redakcyjne

• Uwaga nr 1.

Sformułowana przez Autora na s. 30 uwaga dotycząca dowodu punktu (3):

$$(3) (p \wedge q) \rightarrow^{\square} r \not\equiv_{S2} (p \rightarrow^{\square} r) \vee (q \rightarrow^{\square} r)$$

jest zaskakująca, ponieważ żaden z rozważanych przykładów nie wymaga wprowadzania światów nie-normalnych. Dla punktów (1), (2) wystarczy dodać $\langle w_2, w_2 \rangle$ do relacji Q_1 i pozostawić w_2 w zbiorze N_1 .

• Uwaga nr 2.

W podsumowaniu rozdziału II pojawia się używany później skrót LW, nie mogę jednak znaleźć miejsca, w którym skrót ten został wprowadzony razem z objaśnieniem, że chodzi o logikę wiążącą.

• Uwaga nr 3.

Uwaga do dowodu faktu III.3.2. Krok wyjściowy 2 powinien być sformułowany *explicite*: Niech $A, B \in \text{For}_{LE}$, $z_1(A) = n$ oraz $z_1(B) = 0$. Wówczas, na mocy pierwszego rozumowania indukcyjnego, $R(A, B)$ wtw $\exists_{x \in I_{z_1(A)}} \exists_{y \in I_{z_1(B)}} R(x, y)$. Podobnie, *explicite* należy sformułować krok wyjściowy 2 w dowodzie faktu IV.2.1.

• Uwaga nr 4.

Uwaga do wniosku III.3.6. Skoro we wniosku stwierdza się zachodzenie inkluzji właściwej, należałoby wskazać przykład pokazujący, że inkluzja jest w istocie właściwa, ponieważ rozumowanie poprzedzające wniosek dowodzi jedynie zachodzenia inkluzji zwykłej. Podobna uwaga dotyczy wniosku III.3.29 na s. 67.

• Uwaga nr 5.

Uwaga dotyczy użycia sumy uogólnionej na s. 60, gdzie od nieproblematycznego pojęcia klasy wszystkich funkcji reprezentujących treść o zbiorze wartości Σ (gdzie Σ jest ustalone) przechodzi się do zdecydowanie problematycznego pojęcia klasy wszystkich funkcji reprezentujących treść. Zbiór F_t został wprowadzony jako:

$$\bigcup \{F_{\Sigma} : \Sigma \neq \emptyset \text{ i } \Sigma \text{ jest przeliczalny}\}$$

Uogólniona suma jest tutaj kwantyfikacją po wszystkich zbiorach przeliczalnych, ściśle rzecz biorąc wymaga więc rozważenia z sensem konceptu *zbioru wszystkich zbiorów przeliczalnych*. Aby nie narażać wprowadzanego pojęcia na ten „paraksogeny” aspekt, wystarczy dodać, że zbiory Σ są podzbiorami jakiegoś rozważanego uniwersum.

• Uwaga nr 6.

Na s. 62, dowód faktu 3.19: zamiast dla przypadku (rp₂) przedstawiono rozumowanie dla (rp₅). Podobny błąd pojawia się w dowodzie faktu 3.21.

• Uwaga nr 7.

Na s. 64 w dowodzie faktu 3.23 użyto dość niefortunnie oznaczenia f_{R_f} , w którym pierwsze od lewej wystąpienie litery f jest funktorem, który łącząc się z nazwą relacji tworzy nazwę dla funkcji powiązania określonej względem tej relacji. Z kolei drugie wystąpienie f odnosi się do nazwy funkcji rozważanej w punkcie (2) faktu 3.23. Najprościej byłoby rozpocząć punkt (2) od „Niech $h \in F_t$ ”, wtedy dalej uzyskujemy nieproblematyczną nazwę „ h_{R_f} ”. Uwaga ta w zasadzie odnosi się do wielu fragmentów pracy (choć tylko w tym miejscu problem się „unaocznia”); definicja III.3.9 wyraźnie wprowadza f jako funktor nazwotwórczy, więc w dalszej części pracy ten symbol nie powinien być wykorzystywany jako zmienna dla funkcji, przynajmniej nie bez uprzedzenia czytelnika o zmianie konwencji.

• Uwaga nr 8.

Uwaga dotyczy sformułowania i dowodu lematów III.3.39 i III.3.40, gdzie widzę problem z użyciem kwantyfikacji w metajęzyku. Po pierwsze, w obecnym sformułowaniu lemat III.3.39 ma następujący układ kwantyfikatorów (celowo upraszczam sformułowanie):

(a) dla dowolnej formuły A , dla każdego modelu $\mathfrak{M}$ istnieje model $\mathfrak{N}$ taki, że TEZA,

natomiast dowód tego lematu przebiega według schematu (znów, celowo upraszczam):

(b) niech $\mathfrak{M}$ będzie dowolne, wówczas wskazujemy $\mathfrak{N}$ takie, że przez indukcję po złożoności A wykazujemy TEZĘ.

Rozumowanie (b) dowodzi logicznie mocniejszego od (a) wniosku:

(c) dla każdego modelu $\mathfrak{M}$ istnieje model $\mathfrak{N}$ taki, że dla dowolnej formuły A TEZA.

Kiedy w dowodzie lematu III.3.40 autor odwołuje się do lematu III.3.39 („Rozumujemy podobnie jak w dowodzie lematu 3.39 (1).”), odwołuje się w istocie do sformułowania (c), bo przecież dla lematu 3.40, dotyczącego zbiorów, a nie pojedynczych formuł, nie wystarczy lemat 3.39 w sformułowaniu (a). Z tego bowiem, że dla każdej A , dla każdego $\mathfrak{M}$ istnieje $\mathfrak{N}$ spełniające TEZĘ nie wynika, że dla dowolnego zbioru Σ każda zawarta w nim formuła będzie wskazywać ten sam model $\mathfrak{N}$ spełniający TEZĘ. Lemat III.3.40 jest prawdziwy i dla poprawienia błędu wystarczy zmienić sformułowania obu lematów.

Podobna sytuacja pojawia się w sformułowaniu lematu III.4.22 oraz jego użyciu w twierdzeniu III.4.23. Twierdzenie to z pewnością nie wynika z powyższego lematu w obecnym sformułowaniu. Lemat powinien brzmieć (jak wcześniej, upraszczam):

4.22 (1) Dla każdego modelu $\mathfrak{M}$ istnieje $\mathfrak{N}$ taki, że dla każdego zbioru Σ zachodzi TEZA.

i analogicznie punkt (2). W zasadzie przy takim – poprawnym – ustawieniu kwantyfikatorów można rozważyć dowolną formułę A zamiast całego zbioru Σ , chociaż bardziej właściwe wydaje mi się udowodnienie lematu wprost dla zbiorów.

• Uwaga nr 9.

Dwie uwagi dotyczące dowodu faktu 4.7. Przedstawiony dowód nie wykazuje, że wskazana funkcja należy do klasy $\mathbf{F}_t$, ponieważ nie uwzględniono warunku (1) definicji 3.14 na s. 60. I niestety nie może go uwzględniać. Weźmy bowiem jako R relację pełną na zbiorze For_{LE} , tj. $R = \text{For}_{LE} \times \text{For}_{LE}$. Taka relacja spełnia wszystkie warunki definicji III.4.1 (s. 78), jest więc relacją zależności, ale wyznaczona dla niej, zgodnie ze wskazaną w dowodzie konstrukcją, funkcja f jest funkcją o stałej wartości $\emptyset$. Trudno mi rozstrzygnąć, czy fakt III.4.7 jest prawdziwy, jeśli jest – dowód wymaga innej konstrukcji dla funkcji f . Autor powołuje się na lemat 1 w pracy Epsteina [1, p. 122] (i w istocie wykorzystuje w dowodzie sformułowaną przez Epsteina konstrukcję), ale Epstein w sformułowaniu tego lematu nie uwzględnia funkcji reprezentującej treść. Tym samym defektem obarczony jest dowód faktu III.4.14 (i sam ten fakt).

Moja druga uwaga do dowodu faktu III.4.7 dotyczy pierwszej części dowodu, gdzie wykazuje się, że spełniony jest warunek (2) definicji III.3.14 funkcji reprezentującej treść. Rozumowanie wydaje się przesadnie skomplikowane. Funkcja g zdefiniowana na początku jest po prostu funkcją przeciwobrazu względem relacji R , natomiast f jest dopełnieniem tego przeciwobrazu do zbioru For_{LE} . Pamiętając o tym, możemy dość szybko zauważyć, że gdy R jest przechodnia, to:¹

- jeśli $R(A, B)$, to $R^-(A) \subseteq R^-(B)$,

natomiast jeśli R jest zwrotna, to

- jeśli $R^-(A) \subseteq R^-(B)$, to $R(A, B)$.

¹Przez R^- odnoszę się do przeciwobrazu relacji R .

Podsumowując, gdy R jest zwrotna i przechodnia, to $R(A, B)$ zachodzi wtw $R^-(A) = g(A) \subseteq g(B) = R^-(B)$, to natomiast zachodzi wtw $f(B) \subseteq f(A)$, skoro $f(F)$ jest dopełnieniem $g(F)$.

• Uwaga nr 10.

Wniosek III.4.8: rzeczywiście zachodzi na mocy faktów wskazanych przed sformulowaniem wniosku, ale wskazany byłby dowód (a przynajmniej sformułowanie implikacji, o której mowa – oszczędziłoby czytelnikowi wertowania pracy). Podobna uwaga dotyczy wniosku III.4.15.

• Uwaga nr 11.

Fakt IV.1.7 na s. 102 stanowi jakiś lapsus. Po pierwsze, w obecnym sformułowaniu jest fałszywy (kontrprzykład: wystarczy tak dobrać relację $R \in \mathbf{Q}$, żeby formuła $p \rightarrow^w p$ była prawdziwa w stosownym modelu, wtedy $\{p \rightarrow^w p\} \not\models_{\mathbf{Q}} p$). Po drugie, fakt nie wyraża tego, co mówi komentarz do faktu zamieszczony przed nim. Po trzecie, odwołania do tego faktu w dalszej części pracy wskazują, że autor miał na myśli coś innego niż fakt (i zarazem coś innego niż komentarz). Na fakt IV.1.7 autor powołuje się w pracy dwukrotnie, za każdym razem przytaczając fakt, iż $\{p\} \models_{\mathbf{Q}} q$, i taka zapewne powinna być treść faktu IV.1.7.

Na marginesie: na s. 164, w wierszu 2, znów pojawia się tenże fakt: $p \models_{\mathbf{R}} q$, tym razem bez uzasadnienia. Tu powinno być odwołanie do poprawnie sformułowanego faktu IV.1.7.

• Uwaga nr 12.

Na s. 106 pojawia się logika F . Po wcześniejszych objaśnieniach rozumiem, że jest to językowy fragment logiki W . Kiedy jednak autor odwołuje się w fakcie IV.1.15 do F (s. 107, $A \in F$), nie mogę znaleźć definicji F uzasadniającej przejścia w dowodzie tego faktu. Innymi słowy, oprócz wcześniejszych objaśnień przydałaby się wprost wprowadzona definicja.

• Uwaga nr 13.

Uwaga dotyczy opisu horyzontalnych i wertykalnych relacji wiążących: o ile w przypadku h -relacji słuszne jest ograniczenie zbiorów h -warunków do tych, które wspólnie wyznaczają jakiekolwiek relacje (tzn. nie są razem sprzeczne), o tyle w przypadku zbiorów w -warunków jest to zbędne, ponieważ wszystkie warunki mają postać implikacyjną, którą zawsze spełnia np. relacja pusta. Zbiór $w\mathbf{War}$ wyznacza niepustą klasę relacji, tym bardziej zatem niepuste klasy wyznaczają jego podzbiory.

Ponadto w opisie tych dwóch klas relacji (h -relacji i w -relacji) jest jedna drobna niekonsekwencja: trudno rozstrzygnąć, czy ma jakieś uzasadnienie. Mianowicie, na s. 108 wprowadzając symboliczny skrót² dla h -klasy wyznaczonej przez warunki $(X_1), \dots, (X_n)$ autor podaje $n > 1$, a w analogicznym określeniu dla w -klas mamy $n \geq 1$ (s. 110).

• Uwaga nr 14.

W dowodzie faktu IV.2.9 na s. 121 niezależność klas R_{R0} i R_{D0} (względem $\subseteq$) jest źle uzasadniona. Autor pisze w pierwszym akapicie dowodu: „Na mocy (v) i (vi) $R_{D0}, R_{D1}, R_{D2} \not\subseteq R_{R0}$.” W istocie, na mocy faktu IV.2.8 (1) (przywołanego przez autora w zdaniu poprzedzającym przytoczone) i inkluzji (vi) mamy $R_{D1} \not\subseteq R_{R0}$. Podobnie, na mocy faktu IV.2.8 (1) oraz inkluzji (vii) – a nie (v) – mamy $R_{D2} \not\subseteq R_{R0}$. Co do klasy R_{D0} mamy:

$$R_{D0} \subseteq R_{D1'}, R_{D2'} \quad \text{oraz} \quad R_{D1'} \not\subseteq R_{R0}, R_{D2'} \not\subseteq R_{R0}$$

ale stąd nie wynika, że $R_{D0} \not\subseteq R_{R0}$ (dla porównania: zbiór naturalnych wielokrotności 5 jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych, ten drugi nie jest podzbiorem zbioru naturalnych wielokrotności 15, a ten trzeci jest podzbiorem pierwszego). Podobny błąd pojawia się w kolejnym akapicie w kwestii ustalenia, że $R_{R0} \not\subseteq R_{D0}$. Wydaje się przy tym bezsporne, że wskazane klasy są niezależne względem $\subseteq$, a żeby to wykazać, wystarczy posłużyć się przykładami podanymi przez autora w poprzednich dowodach.

²Nawiasem mówiąc, w omawianym kontekście bardziej uzasadnione wydaje się $Q^{X_1 \dots X_n}$ niż $R^{X_1 \dots X_n}$, i analogicznie $Q_{X_1 \dots X_n}$ na s. 110.

• Uwaga nr 15.

Fakt IV.2.12, s. 124, w dowodzie Autor stwierdza: „Inkluzje określone w (1) i (2) są oczywiste, na mocy definicji odpowiednich klas oraz tego, że $\text{For}_{LE} \subset \text{For}_{LW}$.” Inkluzje te są w oczywisty sposób fałszywe.

Weźmy dowolną niepustą relację R z klasy R_{R0}^Z . Skoro R jest niepusta, to jakaś para spełnia poprzednik warunku $(W_{\oplus 1}^{\text{lub}})$, gdzie $\oplus \in \text{Sl}_{LW}$, oraz przy założeniu, że $A = B$. Warunek $(W_{\oplus 1}^{\text{lub}})$ zachodzi również dla takich $\oplus$, które nie należą do Sl_{LE} , co gwarantuje jednak, że $R \notin R_{rp}$. Z drugiej strony, jeśli $R \in R_{rp}$ jest niepusta, to dowolna należąca do R para spełnia poprzednik warunku $(W_{\oplus 1}^{\text{lub}})$ (j.w. $A = B$), ale nie spełnia jego następnika dla $\oplus \in \text{Sl}_{LW} \setminus \text{Sl}_{LE}$. Zatem $R \notin R_{R0}^Z$. Widzimy stąd, że jedynym elementem wspólnym klas R_{R0}^Z i R_{rp} jest relacja pusta. Z uwagi na $\text{For}_{LE} \subset \text{For}_{LW}$, zachodzenie inkluzji możemy orzekać pomiędzy *elementami* klasy R_{rp} a *elementami* klasy R_{R0}^Z .

Analogiczny komentarz dotyczy punktu (2), oraz punktów (1) i (2) faktu 2.16 na s. 126.

• Uwaga nr 16.

Na marginesie faktu IV.2.14: argumentacja wskazana w dowodzie może posłużyć do wykazania, że uniwersalna (pełna) jest każda relacja, która spełnia jednocześnie (Z) , $(E_i^{\oplus 1})$ i $(E_i^{\oplus 2})$, to czyniłoby jaśniejszymi rozumowania opisane na tej stronie (pierwsze zdanie dowodu faktu IV.2.15 należałoby jednak uzupełnić obserwacją, że $\text{For}_{LW} \times \text{For}_{LW} \in R_{R0}^{ZS}$). Znow na marginesie, pełna jest również każda relacja spełniająca (Z) , (P) , $(W_{\oplus 1}^{\text{lub}})$ oraz $(W_{\oplus 2}^{\text{lub}})$, co daje nam

$$R_{R0}^{ZP} = R_{Rw}^{ZP} = R_{D0}^Z = R_{De}^Z = \{\text{For}_{LW} \times \text{For}_{LW}\}$$

co autor odnotowuje również w pracy na s. 128, w nieco mniej klarowny sposób.

• Uwaga nr 17.

Relacja określona na s. 128 za pomocą warunku (KT) nie spełnia warunku $(E_{\text{lub}}^{\wedge 1})$:

$$p \wedge \neg p \rightarrow q \in \text{KT}, \text{ stąd } R_{\text{KT}}(p \wedge \neg p, q)$$

$$p \rightarrow q \notin \text{KT}, \neg p \rightarrow q \notin \text{KT}, \text{ stąd nie } R_{\text{KT}}(p, q), \text{ i nie } R_{\text{KT}}(\neg p, q)$$

nie spełnia też warunku $(E_{\text{lub}}^{\leftrightarrow 1})$: kontrprzykładem jest $(p \leftrightarrow \neg p) \rightarrow q \in \text{KT}$. Pozostałe z wymienionych przez autora warunków są – o ile moje wyliczenia są poprawne – spełnione, ale całość z pewnością wymaga dowodu.

Konsekwentnie, zmianie muszą ulec wyliczenia klas relacji u góry strony 129.

Kolejny problem w określeniu relacji w tym fragmencie: relacja $\leq$ (określona w dowolnym zbiorze liczbowym) jest antysymetryczna, ale relacja określona przy pomocy warunku (Z_2) z pewnością nie jest antysymetryczna. Nie wiadomo dlaczego autor nie wymienia, wśród warunków spełnianych przez tę relację, warunków $(W_{\oplus 2}^i)$ i $(W_{\oplus 2}^{\text{lub}})$. Skorygowane powinny zostać odpowiednio porównania klas relacji przy pomocy inkluzji.

• Uwaga nr 18.

Aby wyrazić własności relacji wiążących w języku przedmiotowym, autor wprowadza pojęcia schematu formuł, semi-schematu formuł i relacyjnego semi-schematu formuł. Nieodzwonne wydaje się tu objaśnienie do czego te kategorie pojęciowe posłużą. O ile jasne wydaje mi się, że pojęcie semi-schematu jest uogólnieniem pojęcia schematu wprowadzonym po to, żeby schematy można było swobodnie sumować, o tyle definicja relacyjnego semi-schematu wydaje się tajemnicza. Nie rozumiem niestety po co ta definicja zostawia możliwość rozważania „kontrtautologicznych” schematów. Wyjaśnienia nie znalazłam w dalszej części.

• Uwaga nr 19.

Komentarz zamieszczony pod dowodem faktu IV.5.2 (s. 154) dotyczący wzmocnienia inkluzji, o której mowa w tym fakcie, do inkluzji właściwej, jest bardzo nieścisły i powinien zostać przeformułowany w regularny dowód. W szczególności, nie ma gwarancji, że w ogólnym przypadku $B \notin \Lambda_1$ i $A \notin \Lambda_2$. Aby było to prawdą, musiałoby być tak, że *dowolny* schemat charakteryzujący klasę $\mathbf{R}^{X_i}$, również taki schemat, którego autor mógł w ogóle nie rozważać, jest *rozłączny* z *dowolnym* schematem charakteryzującym klasę $\mathbf{R}_{Y_j}$. Nie jest to oczywiste.

W kolejnym akapicie na s. 154 byłoby wskazane, żeby uzasadnić przynajmniej niektóre z podanych równości przez odwołanie do konkretnych faktów lub wniosków.

• Uwaga nr 20.

Przedstawiony na s. 157 dowód lematu 6.2 jest dość niechlujny, co być może wynika z nadmiernej ogólnikowości dowodu przedstawionego przez Kreisla i Kervine'a (patrz: [3, s. 7–8]), na który powołuje się Autor, a który to dowód pomija zupełnie krok wyjściowy. Ostatecznie, lemat IV.6.2 jest prawdziwy, ale jego dowód wymaga przeformułowania.

Moja pierwsza uwaga dotyczy enumeracji formuł: nie wiemy nic o przyjętej enumeracji (nazwijmy ją $\mathcal{E}$) poza tym, że na pewno istnieje. Zwykle, kiedy piszemy $\{p_0, \dots, p_n\}$, wskazujemy skończony zbiór o $n+1$ elementach. Nie ma żadnego powodu, dla którego użyte tutaj n miałyby się odnosić do numerów wyrazów w enumeracji $\mathcal{E}$. W konstrukcji omawianego dowodu należy, po pierwsze, wyraźnie wskazać, że n odnosi się do pewnej enumeracji i równie wyraźnie odróżnić w całym dowodzie użycie wskaźnika n odnoszącego się do ciągu $\mathcal{E}$ (a więc występującego w aspekcie porządkowym) od użycia wskaźników odnoszących się do liczebności skończonego zbioru (aspekt kardynalny). Problem ten jest szczególnie widoczny w sformułowaniu założenia indukcyjnego na s. 158. Należało tutaj po ustaleniu n dodać coś na kształt „niech $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}$ będą wszystkimi i tylko tymi zmiennymi, których numery w enumeracji $\mathcal{E}$ są niewiększe od n ”, i podobnie dla formuł $A_1, \dots, A_m$. Podwójne indeksowanie przy zmiennych jest wskazane, ponieważ $p_1, p_2, \dots$ są „konkretnymi” wyrażeniami języka LW. Na marginesie, w założeniu i kroku indukcyjnym „odliczanie” niekonsekwentnie rozpoczyna się raz od 0, raz od 1.

Po drugie, dowód lematu 6.2 polega, a raczej: powinien polegać, na wykazaniu przez indukcję po numerze formuły w założonej enumeracji, że dla każdego n istnieje *cząstkowe* przyporządkowanie $v_n \in \{1, 0\}^{\{p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}}$ i *skończona* relacja $R \subseteq \{A_1, \dots, A_m\}^2$ takie, że dla dowolnego skończonego $\Gamma \subseteq \Sigma$ istnieje $\mathfrak{N} \in \text{MQ}$ taki, że $\mathfrak{N} \models \Gamma$ i zarazem odpowiednie obcięcie $\mathfrak{N}$ do rozważanych skończonych zbiorów formuł (do n -tej w rozważanej enumeracji) jest identyczne z $\langle v_n, R \rangle$. Podkreślam, że $\langle v_n, R \rangle$ nie jest modelem, bo v_n nie jest wartościowaniem liter zdaniowych w sensie definicji 1.2 (s. 100).

Po trzecie, w części dowodu dotyczącej relacji o określonych własnościach autor pomija krok wyjściowy, co należy przynajmniej skomentować. Przykładowo, dla $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^Z$, trzeba w kroku wyjściowym wykazać, że konstruowana relacja jest zwrotna.

Po czwarte, w poniższej tabeli z uwagami redakcyjnymi nie wskazuję literówek znalezionych w dowodzie z uwagi na fakt, że dowód i tak wymaga przeformułowania.

• Uwaga nr 21.

Strukturalność semantycznej relacji konsekwencji w logice KT nie została udowodniona. Problematyczne rozumowanie pojawia się w dowodzie faktu IV.6.13, s. 166, ostatni akapit. W przedstawionym rozumowaniu dowód wymaga, aby dla dowolnych $A, B \in \text{For}_{\text{LW}}$ i dowolnego podstawienia σ zachodziło: $\sigma(A) \rightarrow \sigma(B) \in \text{KT}$ wtw $A \rightarrow B \in \text{KT}$. Taka równoważność nie jest jednak prawdziwa, zachodzi jedynie, o ile się nie mylę, implikacja od prawej do lewej. Kontrprzykład dla implikacji od lewej do prawej: σ takie, że

$$\sigma(p) = p \rightarrow p \text{ oraz } \sigma(q) = q \rightarrow q$$

Mamy:

$$p \rightarrow q \notin \text{KT} \text{ oraz } \sigma(p) \rightarrow \sigma(q) \in \text{KT}$$

Nie oznacza to, że badana relacja nie jest strukturalna, wydaje się, że dla wykazania strukturalności w zupełności wystarczy, że zachodzi wskazana implikacja od strony prawej do lewej – co, nawiasem mówiąc, również należy wykazać.

• Uwaga nr 22.

Równanie (5.5) na s. 169 przedstawia formułę, która ma być elementem logiki W.R0. Zdaje się jednak, że nim nie jest. Jeśli w jakimś modelu $R(A \wedge B, C)$ oraz $R(B, C)$, ale nie $R(A, C)$, to nie mamy gwarancji, że $R(A, B \wedge C)$. Z podobnych powodów zależność nie zachodzi w W.D0. Potrzebna jest jeszcze co najmniej symetryczność i przechodność relacji wiążącej.

Z kolei w przypadku praw podanych w równaniach (5.9), (5.10) i (5.11) wystarczą logiki nieco słabsze, niż wskazane przez autora, tj. odpowiednio, W.R1, W.R2, W.R1.

• Uwaga nr 23.

W dowodzie faktu 3.7, punkt (3), pojawia się – jak sądzę, w związku z brakiem klarownego odniesienia do przyjętej enumeracji formuł (por. również uwagę nr 20 wyżej) – pewien zamęt, przez co autor nie wskazuje jasno sprzeczności wynikającej z początkowego założenia, że $\Delta \vdash_{\Sigma} p \wedge \neg p$. Należało wskazać: na mocy definicji 2.4 istnieje, dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_m}\} \subseteq \Delta$ taki, że $(B_{i_1} \wedge \dots \wedge B_{i_m}) \rightarrow (p \wedge \neg p) \in \Sigma$. Każda B_{i_j} pojawia się w tej konstrukcji w odpowiednim $\Gamma_{i_j} = \Gamma_{i_{j-1}} \cup \{B_{i_j}\}$. Dla $l = \max\{i_1, \dots, i_m\}$ mamy $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_m}\} \subseteq \Gamma_l$. Zatem Γ_l jest Σ -sprzeczny, co przeczy (2). Stąd $\Delta \not\vdash_{\Sigma} p \wedge \neg p$.

W powyższym rozumowaniu indeksy $i_1, \dots, i_m, l$ odnoszą się do enumeracji formuł, a m do liczebności zbioru $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_m}\}$. Wydaje się to klarowne na podstawie zapisu. Dla porównania, w punkcie (4) tego samego dowodu autor wprowadza najpierw k , które odnosi się do enumeracji formuł, a po chwili l odnoszące się do liczebności zbioru. Czytelnik nie jest przy tym uprzedzony o zmianie aspektów znaczeniowych tych indeksów.

• Uwaga nr 24.

W dowodzie faktu VI.2.3 autor stwierdza „Na mocy faktu 2.1 $(t2_{\wedge^w})-(t4_{\wedge^w}) ((A \wedge B) \wedge (A \oplus B)) \rightarrow (A \wedge^w B) \in \Sigma$.” Prawa $(t2_{\wedge^w})-(t4_{\wedge^w})$ mają jednak postać równoważności, nie implikacji. Należy wykorzystać odpowiednie podstawienie do prawa $(F \leftrightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow G) \in \text{KT}$ i użyć (MP).

• Uwaga nr 25.

Fakt VI.5.2 na s. 209: analiza przeprowadzonych dowodów aksjomatycznych wykazuje, że do udowodnienia punktu (2) nie jest potrzebny aksjomat symetryczności, więc wskazana teza wyprowadzalna jest niżej, w logice WZ.R0. Podobnie, (3) wyprowadzalna jest w WZP.D1.

• Uwaga nr 26.

W dowodach aksjomatycznych, poczynawszy od strony 226, autor używa zastępowania definicyjnego, chociaż nie wprowadził takiego zastępowania jako reguły. Należy wyraźnie podkreślić, że jest to niepoprawne. Każdorazowo zmiana wyrażenia $(A \vee^w B) \vee A \rightarrow^w B$ na $A \heartsuit B$, jak i zamiana odwrotna, powinna być przeprowadzona przy użyciu reguły zastępowania wyrażeń, wprowadzonej *explicite* do systemu.

Uwagi redakcyjne

str.	wiersz	jest	powinno być	komentarz	
5	12 od góry	kazualny	kauzalny	ta formuła odpowiada faktowi (1.2)	
6	11 od góry	powstanie	powstania		
	19 od góry	zgodność	zgodności		
	7 od dołu	charakteryzowalność	charakteryzowalności		
10	8 od góry	ze względu trzy	ze względu na trzy		
14	pierwszy	wyrażaniem	wyrażeniem		
17	6 od dołu	For_{LW}	For_{KLZ}		
19	4 od dołu	$\Sigma \cup \Gamma \subseteq \text{For}_{\text{KLZ}}$	$\Sigma, \Gamma \subseteq \text{For}_{\text{KLZ}}$		
20	6 od góry	$V^v[X] = \{1\}$	$V^v[\Sigma] = \{1\}$		
25	12 od góry	For	For_{KLZ}		
	równanie (1.4)	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$	$A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$	nie ma wyżej równania (3.1)	
	równanie (1.8)	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$	$(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$		
28	8 od dołu	boolowskich	boolowskich		
32	12 od góry	żeby poprzednik takiego zdań gwarantował	żeby prawdziwość poprzednika takiego zdania gwarantowała		
33	14 od góry	$\mathfrak{M}, x \models B$	$\mathfrak{M}, u \models B$		
34	9 od góry	Zgodnie z uwagę	Zgodnie z uwagą		
35	14 od góry	$Q_A^{n+1} = Q_A^k$	$Q_A^{n+1} = Q_A^n$		
36	punkt (5)	$(p \rightarrow^{\text{cp}} q) \vee (q \rightarrow^{\text{cp}} r)$	$(p \rightarrow^{\text{cp}} r) \vee (q \rightarrow^{\text{cp}} r)$		
38		(3.2)	(3.1)		
	6 od dołu	$(p \wedge \neg q)$	$(p \wedge \neg p)$		
	1 od dołu	$\models$	$\neq$		
39		utility	utility		
40	6 od dołu	ternarną relację	ternarną relacją		
42	4 od góry	wyznaczoną	wyznaczony		
43	W równaniu rozpoczynającym się od $v(a)$ jest dwukrotnie w zamiast a .				
46	9 od dołu	użyty	użyta		
	4 od dołu	zostały wypracowane	zostało wypracowanych		
47	6 od góry	lata	latach		
	10 od góry	traktujące	traktująca		
48	21 od góry	równiż	również		
49	17 od góry	$\text{For}_{\text{LW}} \longrightarrow \wp(\text{Lz})$	$\text{For}_{\text{LE}} \longrightarrow \wp(\text{For}_{\text{LE}})$		
	17 od góry	LZ	Lz		
50	3 od dołu	którą	które		
51	6 od góry	zadania	zdania		
	15 od góry	niepsuty	niepusty		
52	6 od dołu	j.w.	j.w.		
54	6 od góry	For_{LW}	For_{LE}		
56	5 wiersz	$\text{Iz}_1(\neg A) = \text{Iz}_1(A)$	$\text{Iz}_1(\neg B) = \text{Iz}_1(B)$		
	d-du faktu 3.5				
	11 wiersz	na równości	na mocy równości		
	tego d-du				
57	4 wiersz	For	For_{LE}		
	d-du faktu 3.7				
	fakt 3.8	LZ	Lz		

str.	wiersz	jest	powinno być	komentarz
58	2 od góry	faktu 3.2	faktu 3.5	
	3 od góry	(1)	(3)	
63	10 od dołu	niepsuty	niepusty	
64	1 od góry	$g(A) \cap g(A)$	$g(A) \cap g(B)$	
		$f(A) \cap f(A)$	$f(A) \cap f(B)$	
	2–3 od góry	na mocy (a), $f_R(A)$	na mocy (a), wtw $f_R(A)$	
	11 od dołu	$g_2(A)$	$g_2(B)$	
		$f_2(A)$	$f_2(B)$	
	3 od dołu	$f(B)$	$f_R(B)$	
65	4 od góry	wartość	wartości	
66	ostatni	(def f_R^*)	(def f_{1R}^*), (def f_{2R}^*)	
69	7 od góry	$\Sigma \cup \{A\} \subseteq \Sigma$	$\Sigma \cup \{A\} \subseteq \text{For}_{LE}$	
	12 od góry	(rp ₃), (rp ₄)	(rp ₆), (rp ₇)	
	6 od dołu	$p \rightarrow p$	$p \rightarrow^w p$	
70	18 od góry	M1F _x	MF _x	
72	13 od góry	indykcyjnego	indukcyjnego	
	19–22 od góry	A, B	B, C	
73	2–3 od góry	A, B	B, C	
	20 od góry	$\models_{\mathbf{MF}_t 1}$	$\models_{\mathbf{M1F}_t}$	
74	13 od góry	q_n	q_m	
	2 od dołu	(2) $\neg p \not\models_S p \rightarrow^w q$	(2) $p \not\models_S \neg p \rightarrow^w q$	por. (1.2) w roz. I
75	2 od góry	formuł	formuła	
	4 od góry	wartościowani	wartościowania	
	15 od góry	For_{LW}	For_{LE}	ta sama literówka jeszcze 2 razy na s. 75 i raz na s. 76
	5 od dołu	formuł	formuła	
77	W toku opowieści Jan nagle zmienia się w Piotra.			
	7 od dołu	Epsteina	Epstein	
	przypis 10	przy przez nas	przez nas	
79	17 od góry	(rz ₅)	(rz ₄)	
	21 od góry	tym	tych	
80	2 od dołu	na równości	na mocy równości	
81	9 od góry	w punkcie 1	w punkcie 1 na s. 76	
83	4 od dołu	$R(\neg A, A)$	$R(A, \neg A)$	
	3 od dołu	$R^{-1}(\neg A, A)$	$R^{-1}(A, \neg A)$	
	2 od dołu	jak przypadku	jak w przypadku	
84	16 od góry	w punkcie 2'	w punkcie 2' na s. 77	
87	2 od góry	$Q(A, \neg A)$	$Q(\neg A, A)$	
	4 od góry	(drz ₁)	(drz ₁) i (drz ₂)	
	11 od dołu	oparte	opartym	
	2 od dołu	LW	LE	mogło też chodzić o LZ, niejasne
89	12 od góry	W korku	W kroku	
	14 od góry	prze τ	przez τ	
	7 od dołu	istniej	istnieje	
90	14 od góry	$R \in \mathbf{D}$	$R \in \mathbf{R}_{rz}$	
	20 od góry	$\not\models_S$	$\not\models_D$	
	ostatni	$\neg p \not\models_{\Lambda} p \rightarrow^w q$	$p \not\models_{\Lambda} \neg p \rightarrow^w q$	por. (1.2) w roz. I
91	3 od góry	LZ	LP	

str.	wiersz	jest	powinno być	komentarz
92	2 od góry	formuł	formuła	
	11 od góry	lz_2	lz_1	
	16 od góry	formuł	formuły	
	19–20 od góry	zachodzenie	zachodzenia	
	21 od góry	$C)) \wedge$	$C) \wedge$	
94	8 od góry	$For_n^{ar(\alpha_i)}$	$For_n^{ar(\oplus_i)}$	
95	3 od dołu	rozszerzonego	rozszerzonym	
	1 od dołu	logik	logiki	
98	2 od dołu	analiza	analizę	
102	4–5 od góry	$\mathfrak{M} \models_{MQ} A$	$\mathfrak{M} \models A$	
	9 od góry	$R \models_Q A$	$R \models A$	
	6 od dołu	nazwać	nazywać	
	5 od dołu	zachowanie	zachowaniem	
103	10 od góry	$Q \models A$	$\models_Q A$	
	11 od góry	$\forall R \in R$	$\forall R \in Q$	dwukrotnie w tym wierszu
	14 od góry	$\in$	$\subseteq$	
	22 od góry	$v_{\mathfrak{M}}(A)$	$v_{\mathfrak{M}}(a)$	
104	9 od góry	V^v	V^w	
105	17 od góry	V^v	V^w	
106	12,15,17 od góry	For_{LW}	For_{FV}	
	2 od dołu	$\langle R_{\mathfrak{M}} \upharpoonright_{For_{FV} \times For_{FV}}, v_{\mathfrak{M}} \rangle$	$\langle v_{\mathfrak{M}}, R_{\mathfrak{M}} \upharpoonright_{For_{FV} \times For_{FV}} \rangle$	zgodnie z def. IV.1.2
107	1 od góry	fakt	fakty	
	12 od dołu	ze względu	ze względu na	
108	1 od góry	III.1.1	III.3.1	
	9 od góry	Niepsutą	Niepustą	
	4 od dołu	zbiór	zbioru	
109	3 od góry	quasi, liniowo	liniowo, quasi	patrz: zestawienie warunków w kolejnym wierszu
	17 od góry	$R^{ZS}, R^{ZP}, R^{SP} \subset R^{ZSP}$	$R^{ZSP} \subset R^{ZS}, R^{ZP}, R^{SP}$	
	21 od góry	zaliczmy	zaliczymy	
110	6 od góry	określamy	określony	
111	5 od góry	$R(A, C)$	$R(A, B)$	
	5 od góry	$R(B, C)$	$R(A, C)$	
	18 od góry	zbiór	zbioru	
112	14 od góry	eliminacji:	eliminacji negacji:	
113	14 od góry	p_2	p_2 :	
	19 od góry	n :	p_2 :	
116	2 od dołu	$n(C)$	$p_2(C)$	dwukrotnie w tym wierszu
117	16 od góry	fakt 2.1	fakt 2.1 i wniosek 2.2	
118	1 od góry	R_1	R	
119	8 od góry	R_1, R_2	R_1, R_2, R_3, R_4	
120	14 od dołu	(p, r)	(r, q)	dwukrotnie w tym wierszu
	1 od dołu	R_{R2}	R_{R1}	
121	ostatni	R_{Dw}, R_{R2}, R_{Dw}	R_{R2}, R_{Dw}	
122	3 od dołu	$\sim Q(p, q \oplus r)$	$\sim Q(p, q \oplus q)$	
	2 od dołu	$\sim R(p, q \oplus r)$	$\sim R(p, q \oplus q)$	

str.	wiersz	jest	powinno być	komentarz
123	1 od góry	$\sim Q(p \oplus r, q)$	$\sim Q(p \oplus p, q)$	
		$\sim R(p \oplus r, q)$	$\sim R(p \oplus p, q)$	
	8 od góry	$\sim R(p, r)$	$\sim R(r, q)$	
	7 od dołu	$R_{\Sigma}^{X \dots X}$	$R_{\Sigma}^{X_1 \dots X_n}$	
	6 od dołu	z-warunków	h-warunków	
124	11 od góry	Brakuje w tym wierszu wtrącenia, że „ $\Sigma = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ ”.		
126	5 od dołu	$R_1 \notin$	$R_2 \notin$	
128	17 od góry	dla jakiegś $\oplus \in \text{Sl}_W$		To wtrącenie jest niezrozumiałe.
128	5–4 od dołu	I	W	kilkakrotnie
	ostatni	(Z_2)	(KT)	
129	1–2 od góry	I	W	wielokrotnie
132	7 od góry	Niech $w[Lz] = 1$.		To zdanie należy usunąć.
	10 od góry	jak w dla	jak dla	
134	3 od dołu	$\vee i$	$\vee$, koniunkcja boolowska i	
135	7 od dołu	$R_{E \neg 1}$	$R_{W \neg 1}$	
136	11 od dołu	7	3	dwukrotnie
137	7 od dołu	C	B	
140	3 od góry	$(\text{lub} \Rightarrow \rightarrow_2)$	$(W_{\rightarrow_2}^{\text{lub}})$	
	8 od dołu	czynnik	składnik	Chodzi o alternatywę.
143	19 od dołu	3.17 (1)	3.17 (2)	
	10 od dołu	3.17 (1)	3.17 (2)	
144	9 od góry	R_{R1}^Z	R_{R2}^Z	
145	5–6 od góry	faktach III.4.7, III.4.14	w faktach III.4.5, III.4.13	
	7 od góry	φ_6	φ_7	
	7 od góry	φ_7	φ_6	
146	7 od góry	definicji 1.6	definicji 1.3	
	13 od góry	boolowskim	boolowskimi	
	3 od dołu	$A \oplus B \in \Sigma$	$(A \oplus B) \in \Sigma$	
147	19 od góry	$\neg D$	$\neg C$	dotyczy pierwszego wystąpienia $\neg D$
		$\neg C$	$\neg D$	
148	5 od góry	$\langle \emptyset, v \rangle$	$\langle v, \emptyset \rangle$	
	6–5 od dołu	przeciwsymetryczne	przeciwsymetryczne	
149	7 od góry	$(p \vee q)$	$(A \vee B)$	
	9 od góry	$(p \vee q)$	$(A \vee B)$	
	11–12 od góry	podany fakt	fakt 4.4	
150	4 od góry	taka	tak	
	7 od góry	v definicji	definicji v	
	20 od góry	wartościowanie	wartościowaniem	
151	18 od góry	analiza	analizą	
153	4 od dołu	$(\Sigma_1), \dots, (\Sigma_n)$	$(X_1), \dots, (X_n)$	
154	3 od góry	wyznaczona	wyznaczoną	
157	3–5 od góry			niezrozumiałe zdanie
160	11 od dołu	$\mathfrak{N} \models A$	$\mathfrak{N} \models \Sigma$	
	9 od dołu	starty	straty	

str.	wiersz	jest	powinno być	komentarz
161	5 od dołu	$\mathfrak{M} \in \mathbf{MR}$	$\mathfrak{M} \in \mathbf{MQ}$	
162	3 od góry	Zob. uwaga wyżej dot. faktu IV.1.7.		
	7 od góry	$A_1, \dots, A_n$	$A_1, \dots, A_n$	
	8 od góry	Zapis nieczytelny, proponuję użycie dodatkowych nawiasów dla poprzednika metajęzykowej implikacji.		
163	13 od góry	$\sigma(B)$	$\sigma(A)$	
	19 od góry	$\sigma(B) \wedge \sigma(C)$	$\sigma(B) \wedge \sigma(C)$	
164	ostatni	$R(\sigma(A), \sigma(B))$ i $R(\sigma(A), \sigma(B))$	$R(\sigma(A), \sigma(B))$ i $R(\sigma(B), \sigma(A))$	
165	3 od góry	funkcje	funkcje	
166	7 od dołu	$R \in \mathbf{R}_{E_{lub}^{\oplus 1}}$	$R \in \mathbf{R}_{W_{\oplus 1}^{lub}}$	
	6 od dołu	$R \in \mathbf{R}_{E_{lub}^{\oplus 2}}$	$R \in \mathbf{R}_{W_{\oplus 2}^{lub}}$	
167	ostatni	Zauważamy	Zauważmy	
168	17 od góry	Wskażmy	Wskażemy	
	20 od góry	tautologię	tautologią	
170	13 od góry	Formułę	Formuła	
171	8 od góry	Lindembauma	Lindenbauma	
172	2 od dołu	korków	kroków	
174	4 od góry	Dla (2).	Dla (3).	
	11 od góry	Dla (3).	Dla (4).	
	13 od góry	$(B_1 \wedge \dots \wedge B_n)$	$(B_1 \wedge \dots \wedge B_n)$	
	14 od góry	$\emptyset \vdash_{\Sigma} A$	$\Gamma \vdash_{\Sigma} A$	
178	12 od dołu	3.2 (2)	3.2 (4)	
	5–4 od dołu	na mocy definicja 2.1)	(na mocy definicji 2.1)	
179	8 od góry	Brakuje podsumowującego zdania: „Stąd $A \wedge B \in \Gamma$ na mocy faktu 3.5.”		
	13 od góry	Lindembauma	Lindenbauma	
	2 od dołu	maksymalnym	maksymalnie	
181	11 od dołu	WZS.D1	WZS.D2	
183	3 od góry	(i) i	(i)	
	5 od góry	3.2 (d)	3.2 (4)	
184	4 od góry	<i>systemem aksjomatycznym</i>	<i>system aksjomatyczny</i>	
	9 od dołu	Logiki	Logika	
	2 od dołu	IV.1.3, $\langle v, R \rangle$	IV.1.3, wtw $\langle v, R \rangle$	
	ostatni	$\mathfrak{M}$	$\langle v, R \rangle$	
185	12 od góry	system	systemem	
	7 od dołu	Zatem	Zatem, na mocy faktu IV.6.6	
	ostatni	$\in \mathbf{R}$	$\in \mathbf{MR}$	
186	1 od góry	lematu 4.5	lematu V.4.5	
	8 od góry	wniosku twierdzenia	wniosku IV.6.5 z twierdzenia	
	12–13 od góry	Na mocy wniosku IV.6.5 (1)	Na mocy wniosku IV.6.5 (1) oraz faktu IV.6.6	
	21 od góry	V.3.2 (d)	V.3.2 (4)	
	21–22 od góry	faktu V.1.4	faktu 1.4	
189	1 od góry	określony	określone	
	3–4 od góry	określonych	określone	
	9 od góry	$\text{Max}_{\mathbf{W}^*}$	Max_{Σ}	
190	9 od góry	$\rangle]$	$\rangle]$	
	15 od góry	podany	podane	

str.	wiersz	jest	powinno być	komentarz
191	4 od góry 4–5 od góry 5 od góry 18 od góry 20 od góry 26 od góry	singletona Innymi wiążącego- $z_4(B)$ $\wedge^w$ $\mathfrak{M}_\Gamma \models B \wedge C$	singletonu Innym wiązący- $z_2(B)$ $\wedge^w$, $B \wedge C \in \Gamma$	
192	4 od góry 5 od góry 9 od góry 11 od góry 13 od góry 14 od góry 14 od góry 22 od góry 4 od dołu	Γ -model system $R(A, B)$ $A \rightarrow^w B$ faktu 2.1 $\vee^w$ $\vee$ będzie system systemem	Γ -modelem systemem $R_\Gamma(A, B)$ $A \rightarrow^w B$ faktu 2.2 $\leftrightarrow^w$ $\leftrightarrow$ będzie alternatywnym systemem system	podobnie w 13 wierszu podobnie w wierszach 16 i 17
193		Brakuje nagłówka tej strony.		
	10 od dołu 6 od dołu	$(Ax_{\vee \vee^w}^*)$ i $\langle v, R \rangle \models B]$	$(Ax_{\vee^w \vee}^*)$	
197	3–4 od góry 6 od góry 7 od góry 13 od góry 14 od góry 19 od góry	dla dla d-logiką 1.1. Dla (2) i (3). Na mocy twierdzenia W IV.1.2. wniosku IV.1.3.	dla h-logiką 1.1 dla (3). (2) zachodzi na mocy twierdzenia 1.2 W. wniosku 1.3.	
198	14 od góry 19 od góry	$B \leftrightarrow C)$ $\neg(A \leftrightarrow B)$	$(B \leftrightarrow C)$ $\neg(B \leftrightarrow A)$	dwukrotnie w tym wierszu
198	20 od góry 21 od góry 26 od góry 2–1 od dołu	(8) $B \leftrightarrow A)$ (4) Zdanie zaczynające się od „Zatem ...” jest zbędne.	(4) $B \leftrightarrow A$ (3)	
199	11 od dołu	wyznaczona	wyznaczoną	
202	3 od dołu 4 od dołu	$\varphi_{E_{\neg 1}}$ $\varphi_{E_{\neg 2}}$	$\varphi_{W_{\neg 1}}$ $\varphi_{W_{\neg 2}}$	
202	10 od dołu	1.1. Dla (2) i (3). Na mocy	1.1 dla (3). (2) zachodzi na mocy	
203	13 od dołu 5 od góry 6 od góry	dla dla twierdzenia W IV.1.2.	dla twierdzenia 1.2 W.	
204	3 od góry	definicji 4.1	definicji V.4.1	To samo dotyczy wierszy: 11, 20, 28.
205	8 od góry 1 od góry 1 od góry 3 od góry 3 od dołu 3 od dołu	$(X) \in ($ $(W_{\oplus 1}^{\text{lub}})$ $(Ax_{W_{\oplus 1}^{\text{lub}}})$ 4.1 $lz(A)$ $lz(B)$	$(X) \in \{($ $(W_{\oplus 1}^i)$ $(Ax_{W_{\oplus 1}^i})$ V.4.1 $lz_2(A)$ $lz_2(B)$	

str.	wiersz	jest	powinno być	komentarz
206	10 od góry	$\text{Max}_{W(\Lambda)}$	$\text{Max}_{Ax(\Lambda)}$	
	10 od góry	$W(\Lambda)$	$Ax(\Lambda)$	
	16 od góry	wLW		Skrót nie został wcześniej wprowadzony.
	2 od dołu	hLW		Skrót nie został wcześniej wprowadzony.
207	3 od góry	λ	Λ	
	17 od góry	przedstawiona	przedstawioną	
208	11 od góry	Na mocy na mocy V.3.6 (1)	Na mocy V.3.6 (1) $B \nrightarrow C \notin \Gamma$.	
		$B \nrightarrow C \notin \Gamma$. Zatem	Sprzeczność. Zatem	
211	12 od góry	faktu VI.1.2	twierdzenia 1.2	
	17 od góry	$\mathfrak{M}_\Gamma \models \phi$	$\mathfrak{M}_\Gamma \models B$	
215	3 od góry	stornie	stronie	

Dodatek:

Dowód dla	wiersz	jest	powinno być	komentarz
(t1 $\wedge^w$)	9.	(MP): 7,8	(MP): 6,7,8	
(t2 $\wedge^w$)	11	(Ax $\wedge^w$)	(Ax $\wedge^w$)	
(t4 $\wedge^w$)	14	(MP): 11, 12, 13	KT	
	23	$B(A \leftrightarrow^w B) \rightarrow$	$(A \leftrightarrow^w B) \leftrightarrow$	
(t4 $\leftrightarrow^w$)	2	(Ax $\leftrightarrow^w$)	KT	
(Ax $\leftrightarrow^w$)	17			Brak w komentarzu „KT”.
faktu VI.3.4 dla (2)	1	fakt VIII.3.4 (1)	fakt VI.3.4 (1)	
faktu VI.5.2 dla (1)	20	Drugie i czwarte z kolei wystąpienie negacji należy usunąć, za to dodać negacje przed 6. i 7. wystąpieniem A.		
faktu VI.5.2 dla (2)	W wierszach: 12, 13, 14, 16, 18 są zbędne nawiasy.			
faktu VI.5.2	15	4–14	2–14	

Błędy zauważone w bibliografii:

- W pozycji *A New Introduction to Modal Logic* nazwiska autorów powinny pojawić się w odwrotnej kolejności: Hughes, Cresswell.
- Epstein, *The Semantic Foundations of Logic*: część pierwsza we współpracy z Walterem Carnielli (nie Carnielli). W przypadku obu części w tytule jest błąd w słowie *Foundtations*. Również imię autora podane jest z błędem: *Richrad* zamiast *Richard*.
- Publikacje autorów *Kreisel*, *Krajewski* pojawiają się w niewłaściwej kolejności alfabetycznej.

Literatura

- [1] R. L. Epstein. *The Semantic Foundations of Logic*, volume 1: Propositional Logics. Springer Science+Business Media, Dordrecht, 1990.
- [2] G. E. Hughes and M. J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1996.
- [3] G. Kreisel and J. L. Krivine. Elements of Mathematical Logic. *Journal of Symbolic Logic*, 34(1):112–112, 1969.